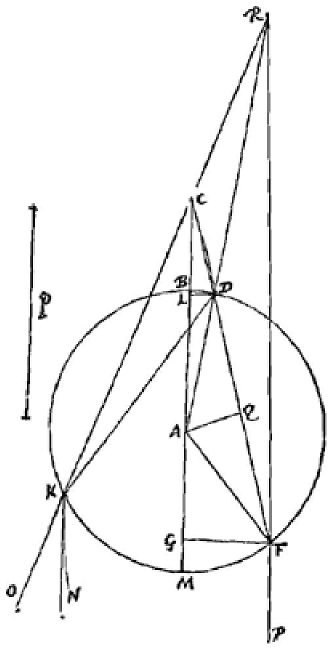
# Appendice II[1]
# Au premier livre du ‘Tractatus de refractione et telescopiis’.
# [Problema utile ad investigandas refractiones.]
# 1652.

22 Dec. 1652.

Data proportione refractionis invenire angulum sub quo Iris primaria spectari debeat,Et contra;Problema utile ad investigandas refractiones[2].




Sit sphaera diaphana secta plano per centrum A, et maximus in ea circulus FBK, cujus diameter BM. Et sit radius solis ipsi BM parallelus PF, qui primum refractus in F pergat secundum FD; deinde in D reflectatur versus K, eruntque FD, DK propterea aequales; et rursus in K refractus pergat secundum KO. Et ducatur KN parallela BM vel PF.

Constat igitur ex Cartesij de Iride tractatu[3] radios eos qui primam iridem producunt eo modo ferri quo radius PF.

Constat etiam determinationem habere angulum NKO, ita ut certo angulo major fieri non possit ex quocunque radio ipsi PF parallelo originem ducat. atque is quidem angulus semidiametrum iridis maxi-

1) La pièce est empruntée aux p. 227-233 du manuscrit N°. 12, mentionné dans la note 1 à la page 7 du Tome XI.
2) Comparez les p. 11-13 du Tome présent.
3) Il s'agit du ‘Discours Huitiesme’ des ‘Meteores’, intitulé: ‘De l'arc-en-ciel’ (T. VI, p. 325-344 de l'édition récente des OEuvres de Descartes par Adam et Tannery).

mam definit; Estque diversus pro diversa proportione refractionis quam habet materia sphaerae diaphanae. Si ex aqua constat angulus OKN cum maximus est aequat grad. 41. 30′[4] atque ea est semidiameter quoque iridis caelestis. At si vitrea est, idem angulus NKO est 21 gr. 52′[5] circiter.

Data igitur refractionis proportione investigandum sit quantus maximus esse possit angulus NKO.

Jungatur AD, et producatur donec occurret producto radio PF in R, et jungatur RK. Ea igitur erit in directum ipsi KO. Nam quia FD, DK aequales sunt, eadem quantitate refringitur radius DK egrediendo densum, atque PF ingrediendo. ideoque angulus DKO aequalis angulo DFP: sed et angulus DKR angulo DFR aequalis est, quia triangula KDR, FDR habent angulos ad D et latera eos comprehendentia aequalia, ergo duobus simul angulis DFP et DFR hoc est duobus rectis aequales sunt anguli DKO et DKR; ideoque RKO linea recta. Est autem angulus OKN aequalis angulo KRF quia KN parallela RF. estque angulus KRF duplus anguli ARF sive DAB. Igitur et angulus OKN anguli DAB duplus. Ergo ut angulus OKN sit maximus qui esse possit, oportet angulum BAD quoque maximum esse. Est autem data ratio lineae FDC[6] ad CA, nam haec eadem est quae ratio refractionis[7], quia FD ponitur refractio radij PF ipsi AC paralleli, sicut in dioptricis ostendimus[8]. Igitur huc tota res redit ut quaeratur punctum F in circumferentia MFB, ejusmodi, ut ductâ FC quae ad CA datam habeat rationem, abscindatur arcus BD maximus qui hoc modo abscindi potest. ducantur ad MB perpendiculares FG, DL. Ergo AL minimam oportet esse, quae possit. Vocetur semidiam. AM, $r$; et proportio refractionis sit quae est lineae $p$ ad $r$, et AC sit $x$.

Ergo quia ut $r$ ad $p$ ita est AC ad CF erit $\mathrm{CF} \infty \frac{px}{r}$, et per 13 l. 1. Elem.[9] erit $\mathrm{AG} \infty \frac{\frac{ppxx}{rr} - xx - rr}{2x}$.

4) Cette valeur correspond exactement avec celle donnée par Descartes; voir les pages 339 et 340 du T. VI de l'édition citée dans la note 3 de la page précédente. Elle y est empruntée à la table où Descartes fait connaître, en prenant 250:187 pour l'indice de réfraction de l'eau, dix-neuf valeurs de l'angle NKO, calculées pour autant de valeurs différentes du rapport de FG au rayon de la sphère, pour en choisir la plus grande comme valeur maximale de l'angle NKO.

5) Valeur déterminée par Huygens lui-même. Comparez la p. 11 du Tome présent vers la sin.

6) Le point C, dont il est question ici, est le point d'intersection des droites BM et FD. Ce n'est que par accident que dans la figure il se trouve si près de la droite KR.

7) On a en effet $\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}} = \frac{\sin \mathrm{FAG}}{\sin \mathrm{DFA}} = \frac{\sin \mathrm{RFA}}{\sin \mathrm{DFA}}$.

8) Il s'agit de la 'Prop. II', p 15 du Tome présent.

9) Lisez '12 l. 2. Elem.' Il s'agit des 'Elementa' d'Euclide; consultez pour le théorème en question la note 18, p. 29 du T. XII.

Fiat deinde ut

$$\mathrm{CF}\left(\frac{px}{r}\right) \text{ ad CM } (x+r) \text{ ita CB } (x-r) \text{ ad CD } \left(\frac{rxx - rrr}{px}\right).$$

$$\text{Ergo FD} \infty \frac{px}{r} - \frac{rxx - r^3}{px}\,^{1)}).$$

$$\begin{array}{ll} \text{Ad AG} & \dfrac{\dfrac{ppxx}{rr} - xx - rr}{2x} \\ \text{addatur AC} & x \end{array}$$

$$\mathrm{CF}\left(\frac{px}{r}\right) \text{ ad CG } \left(\frac{\dfrac{ppxx}{rr} + xx - rr}{2x}\right) \text{ ita FD } \left(\frac{px}{r} - \frac{rxx - r^3}{px}\right)$$

$$\begin{array}{r|l} \text{ad} & \text{LG } \dfrac{p^4x^4 - r^4x^4 + 2r^6xx - r^8}{2pprrx^3} \\ \text{ſubt. ſub eundem denom. reducta} & \text{AG } \dfrac{p^4x^4 - pprrx^4 - p^2r^4x^2}{2pprrx^3} \end{array}$$

$$\text{AL } \frac{pprrx^4 - r^4x^4 + ppr^4xx + 2r^6xx - r^8}{2pprrx^3}$$

$$\text{vel AL }^{2)}\ \frac{(pp - rr)\,x^4 + (pprr + 2r^4)\,xx - r^6}{2ppx^3}$$

1) 2)

Ponatur jam $x+y \infty x$ et substituantur potestates ejus in locum potestatum $x$, ut rursus habeatur AL, quae cum praecedenti comparetur[3].

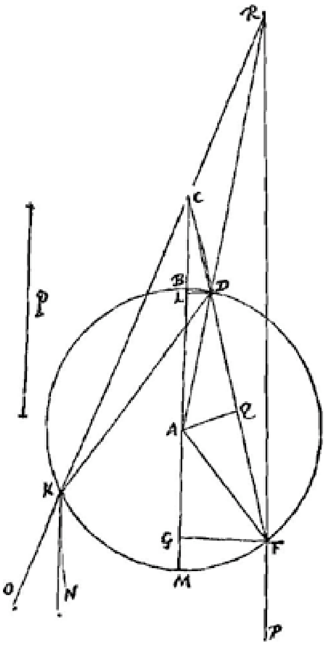
$$\text{fit AL } \frac{\left\{\begin{array}{l} ppx^4 + 4ppx^3y + 6ppxxyy + 4ppxy^3 + ppy^4 \\ - rrx^4 - 4rrx^3y - 6rrxxyy - 4rrxy^3 - rry^4 \\ + 2r^4xx + 4r^4xy + 2r^4yy \\ + pprrxx + 2pprrxy + pprryy \\ - r^6 \end{array}\right\}}{2ppx^3 + 6ppxxy + 6ppxyy + 2ppy^3} \infty \frac{\left\{\begin{array}{l} ppx^4 \\ - rrx^4 \\ + 2r^4xx \\ + pprrxx \\ - r^6 \end{array}\right\}}{2ppx^3} \text{ AL}$$

1) Le manuscrit donne '$px/r$ - $rxx+r^3$ / $px$'; mais nous avons cru devoir remplacer ici et plus loin cette notation un peu embarassante par la notation moderne équivalente.

2) Huygens indique encore dans le texte une autre manière de calculer AL, comme il suit: 'Oportebat dicere CF ad CG ut CD ad CL quam autem s[ubtracta] à CA $\infty$ $x$, fit LA.'

3) Consultez sur la méthode dont Huygens se sert ici, pour calculer la valeur maximale de LD, le § 11, p. 19 du Tome XI.

Post alternas multiplicationes per denominatorem utrumque omnia dividenda per $y$; quo facto eae quantitates quibus adhuc $y$ aderit




omnes delendae sunt, sed quae deleri debere constat non opus est scribere ut hic erunt omnia praeterquam quibus simplex $y$ inerit[4].

Ergo $8p^4x^6y - 8pprrx^6y + 8ppr^4x^4y +$
$+ 4p^4rrx^4y \infty 6p^4x^6y - 6pprrx^6y +$
$+ 12ppr^4x^4y + 6p^4r^2x^4y - 6ppr^6xxy$

$ppx^4 - rrx^4 - 2r^4xx - pprrxx +$
$+ 3r^6 \infty 0$

dividitur per $xx$-$rr$ et fit $ppxx$-$rrxx$-$3r^4 \infty \infty 0$ non tamen $xx \infty rr$ proposito convenit sed

$$xx \infty \frac{3r^4}{pp - rr}$$

Ergo $pp \infty \frac{3r^4 + rrxx}{xx}$; $p \infty \frac{r}{x}\sqrt{3rr + xx}$

Verùm ut q.AB ($rr$) ad $pp$ hoc est $\frac{3r^4 + rrxx}{xx}$ ita est q.AC ($xx$) ad q.CF

Ergo q.CF $\infty 3rr + xx$.

Subtr. q.AC + q.AF $\left\{ xx + rr \right.$

reliq. $2rr \infty 2 \square$ CAG [5]), div. per 2 CA ($2x$)

Ergo AG $\infty \frac{rr}{x}$. Ergo q.AG $\infty \frac{r^4}{xx}$. Sed $xx \infty \frac{3r^4}{pp - rr}$.

5)

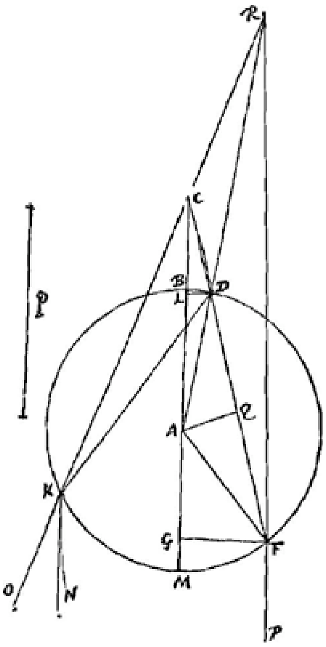
Ergo q.AG $\infty \frac{pp - rr}{3}$. Itaque cognitis $p$ et $r$ facile cognoscitur AG, et hinc angulus NKO. Nam ex sinu AG datur angulus AFG, cujus complementum angulus GAF.

4) Comparez la note 11, p. 48 du Tome XI.
5) Huygens ajoute en marge '13. 1. Elem.'; mais consultez la note 9 de la page 147.

ergo datur et sinus GF[6]. Habet autem GF ad AQ perpend. in FD proport. refractionis eandem scilicet quam FC ad CA quae data est. Ergo hinc datur AQ sinus anguli AFQ; cujus complementum angulus QAF. Hic autem bis sump-

6) Huygens ajoute encore en marge: ‘Vel subtrahendo q.AG à q.AF invenitur $\text{q.GF} \infty \frac{4\,rr - pp}{3}$’.

tus, addito angulo FAG, constituit angulum GAD quo ablato ex duobis rectis restat angulus DAB, cujus duplus est NKO, sub




quo semidiameter iridis conspicietur ut superius dictum fuit[1].

dato autem angulo NKO refractionis proportionem invenire solidum[2] est. Dato enim angulo NKO datur quoque dimidium ejus nempe angulus DAB. Ergo data est AL, quae vocetur $a$: et sit AC sicut prius $\infty\, x$. Inventum autem fuit quod cum angulus NKO maximus est, AG est $rr/x$, Et tota CG $\infty\, x + \frac{rr}{x}$. Sed haec aliter quoque nunc exprimetur atque inde habebitur aequatio.

Sciendum itaque quod CD est ad CF ut □ FCD ad qu. FC. Est autem □ FCD $\infty$ □ MCB hoc est differentiae quadratorum AC, AB sive $xx$-$rr$; et antea inventum fuit qu. FC $\infty$ $3rr$+$xx$. Ergo CD ad CF ut $xx$-$rr$ ad $3rr$+$xx$ sed ut CD ad CF ita CL ad CG; estque CL $\infty$ $x$-$a$. Ergo erit CG $\infty \frac{x^3 + 3rrx - axx - 3rra}{xx - rr}$ aequalis $x + \frac{rr}{x}$ prius inventae.

$x^4 + 3rrxx - ax^3 - 3arrx \infty x^4 - r^4$ æquatio dividi nequit.

$$x^3 - \frac{3rrxx}{a} + 3rrx - \frac{r^4}{a} \infty 0$$

ad auferendum secundum terminum ponatur $z + \frac{rr}{a} \infty x$[3]

Et invenitur

1) Le premier problème: celui de trouver le diamètre de l'arc-en-ciel étant connu l'indice de réfraction, est donc résolu, et Huygens va s'occuper du problème inverse.
2) C'est-à-dire, il s'agit d'un problème solide menant à une équation cubique ou biquadratique.
3) On peut comparer dans le Livre III de la Géométrie de Descartes le paragraphe 'Comment on peut oster le second terme d'une Equation' (p. 449-450 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery).

$$z^3 - \frac{3r^4}{aa}z - \frac{2r^5}{a^3} + \frac{2r^4}{a} \infty 0$$
$$+ 3rrz$$

vel $z^3 - \frac{3r^4}{aa}z \infty \frac{2r^6}{a^3} - \frac{2r^4}{a}$ unde per methodum Vietæ, Probl. 11
$+ 3rrz$

de Numerosa Potest. Res. radix extrahetur[4], redactis prius omnibus ad numeros. Sic igitur inventa quantitate *z*, addendum est *rr*/*a* (quae est secans anguli DAB) et habebitur *x*, unde porro *p* innotescet, nam inventum est superius $pp \infty \frac{3r^4 + rrxx}{xx}$. Ergo inventa erit proportio refractionis nam ea est ut *p* ad *r*.

Si *rr*/*a* secans anguli DAB quae data est vocetur *s*. Erit

AEquatio haec $\left.\begin{matrix} z^3 - 3ss \\ + 3rr \end{matrix}\right\} z \infty 2s^3 - 2rrs$

Et rursus si *ss*-*rr* vocetur *tt*, (est enim *ss*-*rr* ∞ qu°. tangentis anguli DAB)

Erit AEquatio haec $z^3$-3*ttz* ∞ 2*tts*.

Itaque dato angulo sub quo semidiameter Iridis maxima spectatur, proportio refractionis invenietur per regulam sequentem:

REGULA: *Inveniatur numerus qui ductus in quadratum suum multatum triplo quadrato tangentis dimidij anguli dati, fiat aequalis quadrato ejusdem tangentis, ducto in duplam secantem suam* (quod fiet per methodum à Vieta traditam Probl. XI de numerosa potestatum affect. Resolutione;) *atque is numerus dictae secanti addatur. Habebit radix quadr. ducta ex quadrato ejus summae et triplo quadrato radij ad ipsam summam proportionem eam quae est Refractionis*[5].

Exempli gratia proponatur invenienda proportio refractionis aquae ex eo quod semidiameter Iridis caelestis maxima conspicitur sub angulo 41 gr. 30′.

Dimidium ejus anguli est 20. 45′ hujus tangens 37886. hujus quadratum 1435348996. triplum ejus 4306046988. secans autem 20. 45′ est 106936 cujus duplum 213872 ductum in quadratum tangentis 1435348996 facit 306980960472512.

Si igitur numerus inveniendus vocetur *x* erit aequatio ista;

$$x^3 - 4306046988\, x \infty 306980960472512.$$

unde invenitur per Vietæ regulam $x \infty 88269$ circiter.

add. fecans 20. 45. 106936

fum. 195205

4) Voir à la page 198 de l'ouvrage cité dans la note 31, p. 10 du T.I le 'Problema XI. E dato in numeris cubo adfecto multa solidi sub latere & dato coëfficiente plano, latus analytice elicere'. Viète y applique sa méthode successivement aux équations: 1 C[ubus]-10 N[umerus] ∞ 13584 et 1 C-116620 N ∞ 352947, trouvant pour les racines 24 et 343.

5) C'est-à-dire, $\sqrt{x^2 + 3r^2} : x = p : r$; proportion qu'on déduit facilement de la formule pour *p* qu'on trouve plus haut. La règle fut communiquée à van Gutschoven dans une lettre du 6 mars 1653 (p. 226 du T.I).

Summae hujus quadratum eſt 38104992025 } ad.
triplum qu. radij 30000000000 }

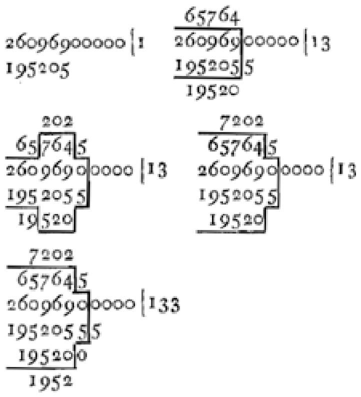
ſum. 68104992025 cujus radix 260969

195205 —— 100000 —— 260969 [1]

1* [2]
183*
17598*
1346157*
72023265*
6576455005*
26096900000 } 133689 [3]
19520555555
195200000
1952222
19555
199
1

Ergo 133689 ad 100000 est proportio refractionis aquae quae proxime est

1) La proportion indiquée dans la note précédente est appliquée ici sous la forme $x(AC) : r = \sqrt{x^2 + 3r^2} : p$.
2) Dans le manuscrit tous les chiffres, qui participent à l'opération qui suit, sont biffés à l'exception de ceux que nous avons marqués d'un astérisque, et de ceux du quotient 133689.
3) Pour expliquer l'algorithme suivi par Huygens dans cette division du nombre 26096900000 par 195205, il sera utile de représenter ici quelques uns des états successifs du calcul en question, où partout les chiffres qui se trouvent à l'intérieur de la ligne brisée doivent être supposés avoir été biffés à mesure qu'ils furent employés.



La première figure nous fait connaître le commencement du calcul. Dans la seconde le deuxième chiffre du quotient vient d'être obtenu par la division approximative du reste 6576400000 par le diviseur 195205. Dans la troisième l'opération avec ce deuxième chiffre est en marche. Le calculateur n'a plus qu' à multiplier le 9 du diviseur par 3, à y ajouter le 1 de 15 qu'il a retenu et à soustraire 8 de 65, ce qui lui donne le 7 qui manque encore an nouveau reste; ensuite il multipliera 1 par 3, y ajoutera le 2 de 28, qu'il a retenu, ce qui fera disparaître le 5 de $57 = 65 - 8$ et amènera la quatrième figure.
Enfin la dernière figure nous représente le moment où le troisième chiffre a été obtenu par la division du nouveau reste 720250000 par le diviseur 195205.

eadem quam 250 ad 187 et paulo major quam 4 ad 3 sicut et Cartesius ipsam ex Iride invenit, sed ope tabulae ad hoc constructae[4)].

Contra autem cum proportio refractionis data est invenietur angulus sub quo semidiameter Iridis maxima spectari debeat per Regulam hujusmodi.

REGULA. *Ut minor proportionis terminus ad majorem ita sit radius circuli qui est in Canone ad alium numerum. Ejus numeri quadratum auferatur à quadruplo quadrato radij. Et e triente residui eliciatur radix quadr atica*[5)]. *Porro ut major proportionis terminus ad minorem ita sit radix inventa ad alium numerum*[6)] *et quaeratur cujus anguli sit sinus hic numerus in canone. Nam si ab anguli hujus duplo auferatur angulus cujus sinus est radix praedicta*, *reliquum bis sumptum dabit angulum semidiametri Iridis quaesitum*[7)].

Exempli gratia sit data proportio refractionis aquae quae est 250 ad 187.

| minor terminus | major terminus | radius |
|---|---|---|
| 187 —— | 250 —— | 100000/133690 hujus numeri quadratum est |

17873016100 quod ablatum à quadruplo quadr. radij nempe 40000000000, relinquit 22126983900 cujus tertia pars est 7375661300.

Hujus radix quadr.[a] est 85881

250 —— 187 —— 85881/64238, qui numerus est sinus anguli 39.58′

| | | |
|---|---|---|
| | 2 | |
| duplum | 79.56′ | auf. |
| angulus cujus sin. 85881. | 59.11′ | |
| resid. | 20.45 | |
| | 2 | |
| dupl. | 41.30′ | angulus |

sub quo semidiam. Iridis maxima spectatur[8)].

4) En réalité Descartes dans ses ‘Meteores’, au lieu cité dans la note 4, p. 147 du Tome présent, ne prétend pas avoir mesuré exactement le diamètre de l'arc-en-ciel. Tout au contraire, au moyen de la table en question, il calcule ce diamètre en partant du rapport 187 à 250 de la réfraction ‘le plus iustement’ comme il dit (voir la p. 337 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) ‘que j'aye pû la mesurer.’

5) Huygens ajoute ici en marge ‘Hinc apparet proportionem refractionis non majorem dupla esse debere, ut Iris conspici possit.’ Consultez la note 6, p. 149 du Tome présent. Le nombre calculé jusqu' ici représente la ligne FG de la figure.

6) Ce nombre représentera la ligne AQ.

7) En effet, $2\angle QFA - \angle FAG = \angle DAC = \angle FRA = \frac{1}{2}\angle NKO$. Cette règle, de même que la précédente, fut communiquée à van Gutschoven dans la lettre mentionnée dans la note 5, p. 151.

8) On rencontrera plus loin dans l'Appendice VIII, p. 163, des calculs qui se rapportent à l'arc-en-ciel secondaire.